

## TEMA 2. EL MODEL DE REGRESSIÓ SIMPLE

Joan Llull

Materials: <http://pareto.uab.cat/jllull>

Tutories: dijous de 11:00 a 13:00h  
(concertar cita per email)  
—Despatx B3-1132—

*joan.llull [at] movebarcelona [dot] eu*

# *Continguts*

## **TEMA 2. EL MODEL DE REGRESSIÓ SIMPLE**

- 1** El model.
- 2** L'estimador mínim quadrat ordinari (MQO).
- 3** Bondat de l'ajust.
- 4** Distribució de l'estimador MQO.
- 5** Experiments de Monte Carlo.
- 6** Aplicacions.

# *Continguts*

## **TEMA 2. EL MODEL DE REGRESSIÓ SIMPLE**

- 1** El model.
- 2 L'estimador mínim quadrat ordinari (MQO).
- 3 Bondat de l'ajust.
- 4 Distribució de l'estimador MQO.
- 5 Experiments de Monte Carlo.
- 6 Aplicacions.

## *El model de regressió simple*

Recordeu que el **model de regressió** simple tenia la següent estructura:

$$y_i = \beta_0 + \beta_1 x_i + u_i \quad u_i \sim i.i. \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Si tenim una mostra de  $N$  individus, tindrem les següents **observacions**:

$$y_1 = \beta_0 + \beta_1 x_1 + u_1 \quad u_1 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2),$$

$$y_2 = \beta_0 + \beta_1 x_2 + u_2 \quad u_2 \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2),$$

$\vdots$

$$y_N = \beta_0 + \beta_1 x_N + u_N \quad u_N \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2).$$

Això ho podem transformar a **notació matricial** (pissarra).

## *Model de regressió simple: notació matricial*

El **model en notació matricial** quedaria expressat de la següent manera:

$$y = X\beta + u \quad U \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2 I_N),$$

on:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{bmatrix} \quad X = \begin{bmatrix} 1 & x_1 \\ 1 & x_2 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & x_N \end{bmatrix} \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_0 \\ \beta_1 \end{bmatrix} \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_N \end{bmatrix}.$$

## Supòsits

Els **supòsits** que farem sobre  $u_1, u_2, \dots, u_N$  (coneguts com a supòsits “**clàssics**” del model de regressió amb  $x$  **fixes**) són:

1. Totes les pertorbacions tenen **esperança** igual a **zero**:

$$\mathbb{E}[u_i] = 0 \quad \forall i.$$

2. Totes les pertorbacions tenen la mateixa variància (**homoskedasticitat**):

$$\text{Var}(u_i) = \sigma^2 \quad \forall i.$$

3. Les pertorbacions **no** estan **correlacionades** entre elles:

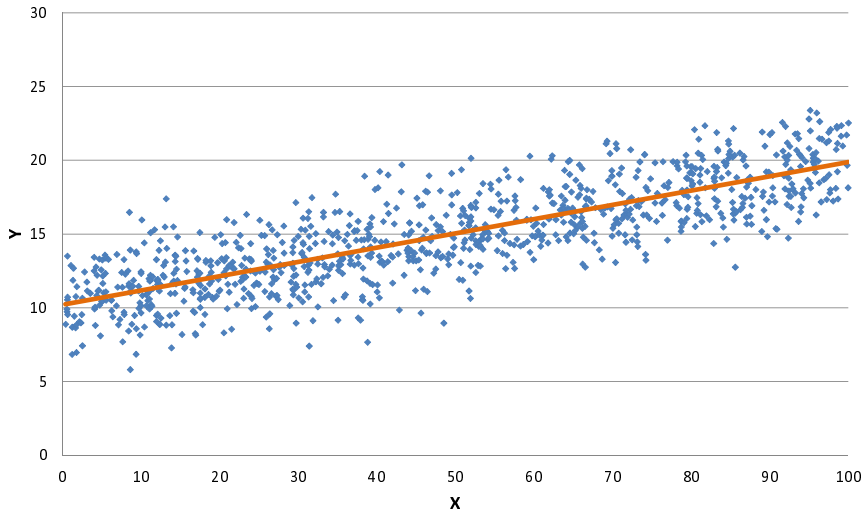
$$\text{Cov}(u_i, u_j) = 0 \quad \forall i \neq j.$$

4. Totes les pertorbacions segueixen una distribució **normal**:

$$u_i \sim \mathcal{N}(\cdot).$$

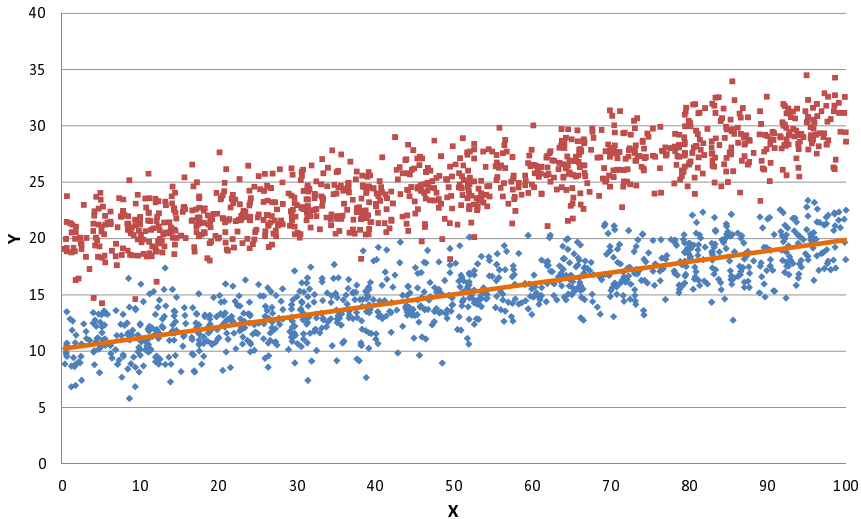
# *Tots els supòsits es compleixen*

Model que compleix tots els supòsits



# *Desviacions (I): $\mathbb{E}[u_i] \neq 0$*

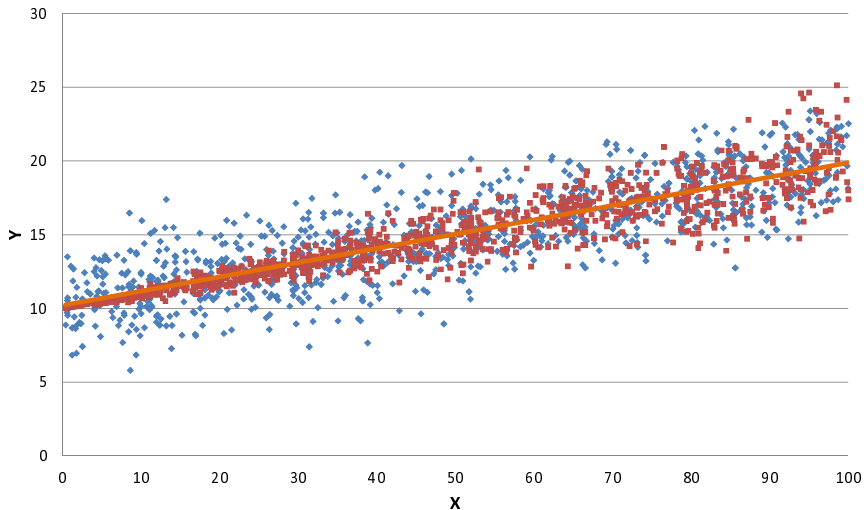
**Violació del Supòsit 1**





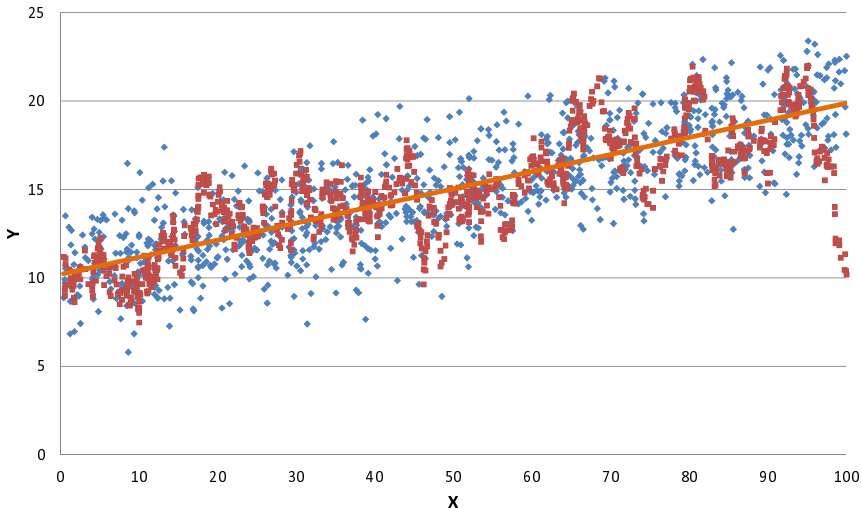
# *Desviacions (II):* $\text{Var}(u_i) = \sigma_i^2 \neq \sigma_j^2 = \text{Var}(u_j)$

## Violació del Supòsit 2



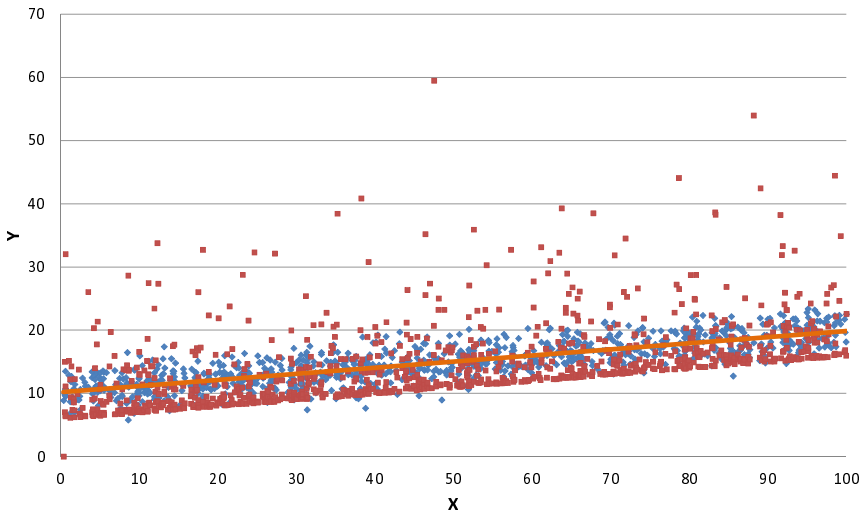
# *Desviacions (III): $\text{Cov}(u_i, u_j) \neq 0$*

## Violació del Supòsit 3



# Desviacions (IV): $u_i \approx \mathcal{N}(\ )$

## Violació del Supòsit 4



## *Implicacions sobre $y_i$ dels supòsits sobre $u_i$*

1.  $\mathbb{E}[u_i] = 0 \quad \forall i \quad \rightarrow \quad \mathbb{E}[y_i] =$

2.  $\text{Var}(u_i) = \sigma^2 \quad \forall i \quad \rightarrow \quad \text{Var}(y_i) =$

3.  $\text{Cov}(u_i, u_j) = 0 \quad \forall i \neq j \quad \rightarrow \quad \text{Cov}(y_i, y_j) =$

4.  $u_i \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2) \quad \forall i \quad \rightarrow \quad y_i \sim$

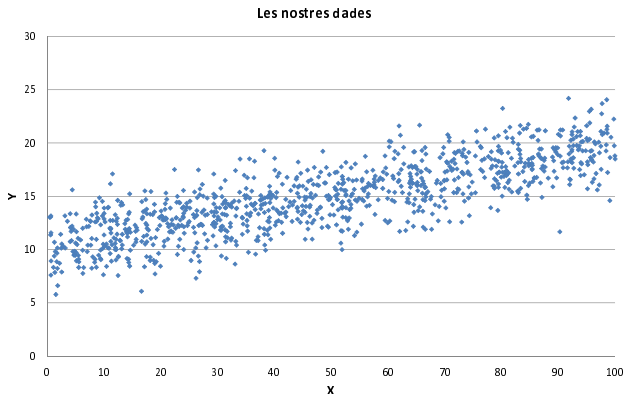
# *Continguts*

## **TEMA 2. EL MODEL DE REGRESSIÓ SIMPLE**

- 1 El model.
- 2** L'estimador mínim quadrat ordinari (MQO).
- 3 Bondat de l'ajust.
- 4 Distribució de l'estimador MQO.
- 5 Experiments de Monte Carlo.
- 6 Aplicacions.

# Objectiu del procés d'estimació

Quin procés pot haver generat les nostres dades?



No coneixem la recta de regressió poblacional!

**Objectiu:** aproximar  $\beta_0$  i  $\beta_1$  a partir de les nostres dades. És a dir, “estimar”  $\beta_0$  i  $\beta_1$  (recta de regressió mostral).

## *Escollir la recta de regressió mostral*

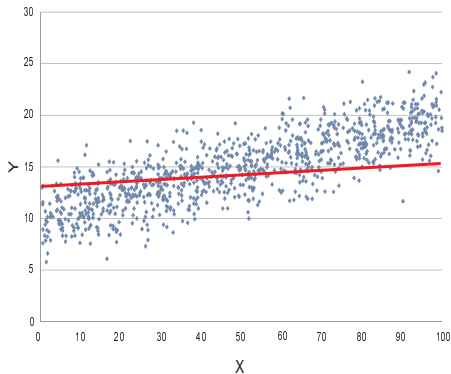
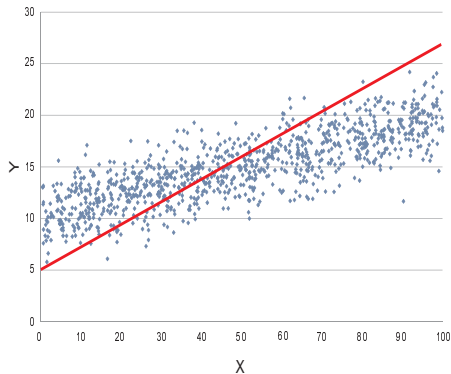
**Com escollirem** la recta de regressió mostral? Quina recta és el més probable mecanisme generador de les dades?

El més probable és que la nostra mostra contengui **moltes** observacions **a prop** de la RRP i **poques enfora**.

Cal triar aquella recta que “**millor s’ajusti**” a la mostra!

**Solució:** triar aquella recta que generi els residus més petits.

## *Dos exemples del que no volem*



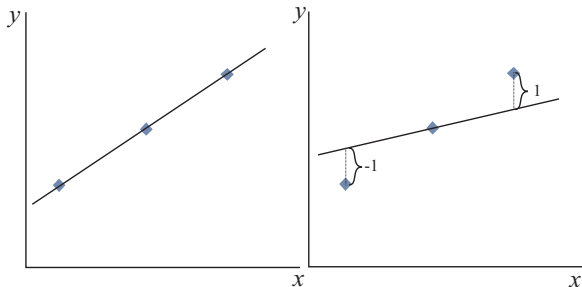


## *Els residus més petits (I)*

Un podria pensar que la manera fer els residus el més petits possibles seria minimitzar la **suma dels residus**:

$$\min_{\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1} \sum_{i=1}^N \hat{u}_i.$$

**Problema:** els valors positius i negatius es compensen!

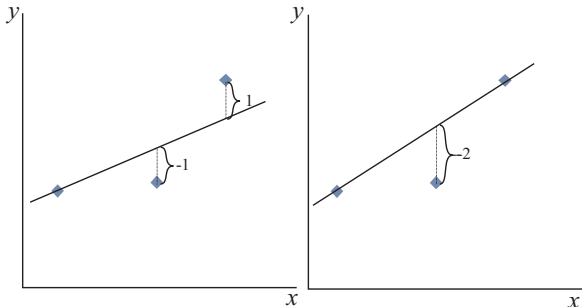


## *Els residus més petits (II)*

Una solució al problema anterior podria ser minimitzar la suma dels **valors absoluts** dels residus:

$$\min_{\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1} \sum_{i=1}^N |\hat{u}_i|.$$

**Problema:** aquest mètode no penalitza que les observacions estan molt allunyades!



## *Els residus més petits (III)*

La millor alternativa serà, per tant, minimitzar la **suma dels quadrats dels errors**:

$$\min_{\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1} \sum_{i=1}^N \hat{u}_i^2.$$

Aquest és l'estimador de **mínims quadrats ordinaris** (MQO).

L'estimador MQO:

- No compensa els valors **positius** amb **negatius**.
- Penalitza les (menys probables) observacions **allunyades**.

## L'estimador MQO

$$\min_{\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1} \sum_{i=1}^N \hat{u}_i^2 \Leftrightarrow \min_{\hat{\beta}} \hat{u}'\hat{u} \Leftrightarrow \min_{\hat{\beta}} (y - X\hat{\beta})'(y - X\hat{\beta}).$$

(pissarra)

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y.$$

(pissarra)

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})(x_i - \bar{x})}{\sum_{i=1}^N (x_i - \bar{x})^2}; \quad \hat{\beta}_0 = \bar{y} - \hat{\beta}_1\bar{x}.$$

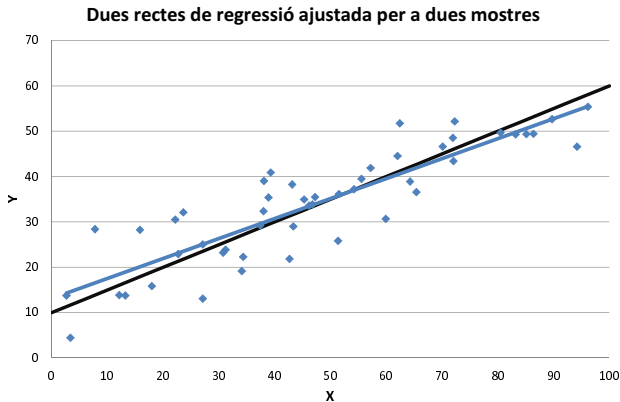
# La recta de regressió ajustada

La **recta de regressió ajustada** ve donada per:  $\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$ ,  
on  $\hat{y}_i$  és el **valor ajustat**:



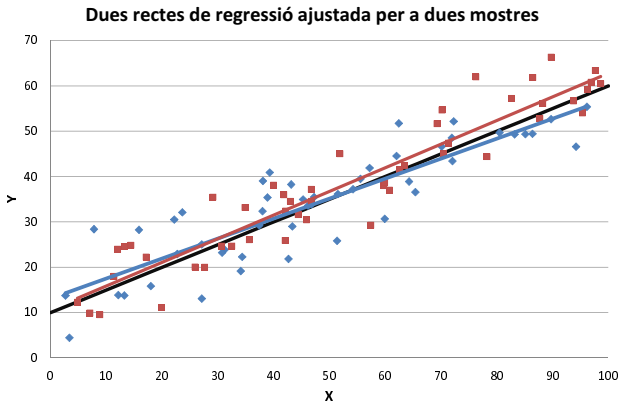
# La recta de regressió ajustada

La **recta de regressió ajustada** ve donada per:  $\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$ ,  
on  $\hat{y}_i$  és el **valor ajustat**:



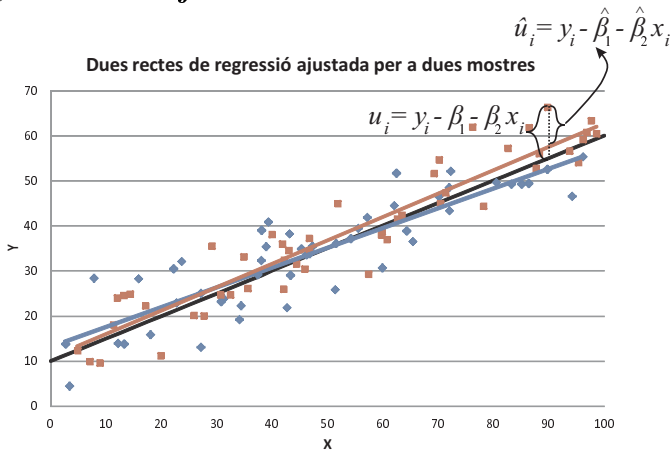
# La recta de regressió ajustada

La **recta de regressió ajustada** ve donada per:  $\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$ ,  
on  $\hat{y}_i$  és el **valor ajustat**:



# La recta de regressió ajustada

La **recta de regressió ajustada** ve donada per:  $\hat{y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x_i$ ,  
on  $\hat{y}_i$  és el **valor ajustat**:



El **residu** és l'estimació de la pertorbació:  $\hat{u}_i = y_i - \hat{y}_i$ .



## *Propietats numèriques de l'estimador MQO*

Hi ha dues **propietats numèriques** de l'estimador MQO que són força interessants:

$$\sum_{i=1}^N \hat{u}_i = 0.$$

$$\sum_{i=1}^N x_i \hat{u}_i = 0.$$

(demostracions a la pissarra)

# *Continguts*

## **TEMA 2. EL MODEL DE REGRESSIÓ SIMPLE**

- 1 El model.
- 2 L'estimador mínim quadrat ordinari (MQO).
- 3** Bondat de l'ajust.
- 4 Distribució de l'estimador MQO.
- 5 Experiments de Monte Carlo.
- 6 Aplicacions.

## *Què és la “Bondat de l’ajust”?*

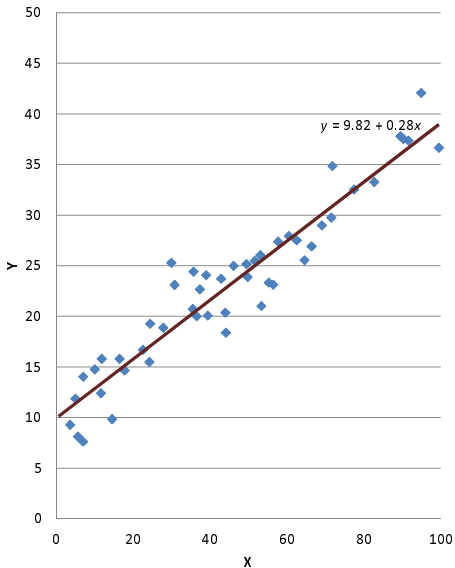
Una vegada tenim un estimador (MQO) pels nostres paràmetres ens podem demanar:

- És el nostre model una **bona representació** de les dades?
- Quina part de  $y$  ve **explicada pel model** i quina part per la **pertorbació**?
- Ens hem deixat moltes **variables importants** sense incloure?

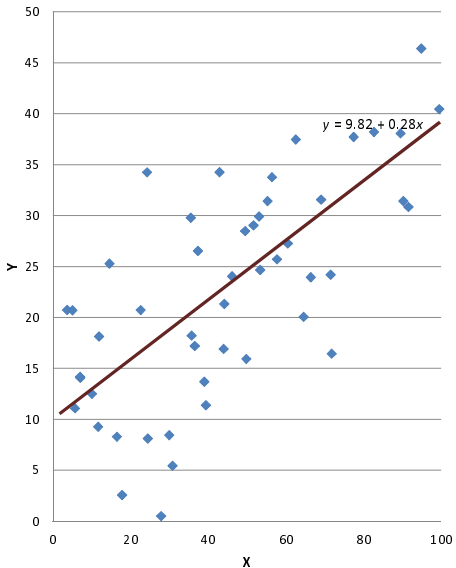
La **bondat de l’ajust** és la resposta a aquestes preguntes: ens indica si el model és una bona aproximació de les nostres dades.

# Bondat de l'ajust vista gràficament

"Bon" ajust



"Mal" ajust



## Sumes de quadrats

Per poder establir una mesura de bondat de l'ajust hem de definir primer els següents conceptes:

- **Suma dels quadrats totals:**

$$SQT = (y - \bar{y}\iota)'(y - \bar{y}\iota) = \sum_{i=1}^N (y_i - \bar{y})^2 = N\widehat{\text{Var}}(y_i).$$

- **Suma dels quadrats explicada:**

$$SQE = (\hat{y} - \bar{y}\iota)'(\hat{y} - \bar{y}\iota) = \sum_{i=1}^N (\hat{y}_i - \bar{y})^2 = N\widehat{\text{Var}}(\hat{y}_i).$$

- **Suma dels quadrats dels residus:**

$$SQR = \hat{u}'\hat{u} = \sum_{i=1}^N \hat{u}_i^2 = N\widehat{\text{Var}}(\hat{u}_i).$$

Es pot demostrar que  $SQT = SQE + SQR$ . (pissarra)

## *El coeficient de determinació ( $R^2$ )*

La nostra mesura ens ha de dir quina **proporció** de la **variació de  $y$**  està **explicada** pel nostre model de regressió.

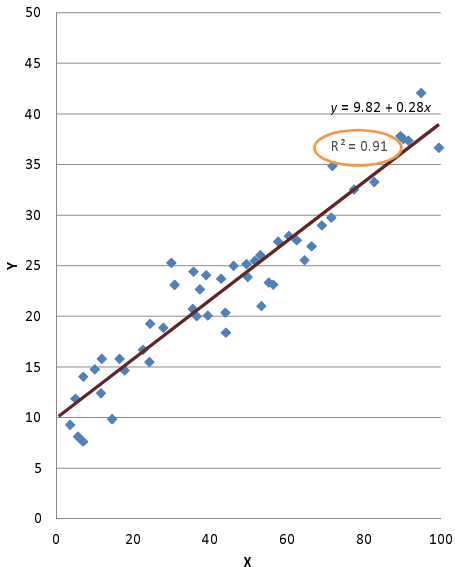
Aquesta és, de fet, la definició del **coeficient de determinació**:

$$R^2 = \frac{SQE}{SQT} = \frac{SQT - SQR}{SQT} = 1 - \frac{SQR}{SQT}.$$

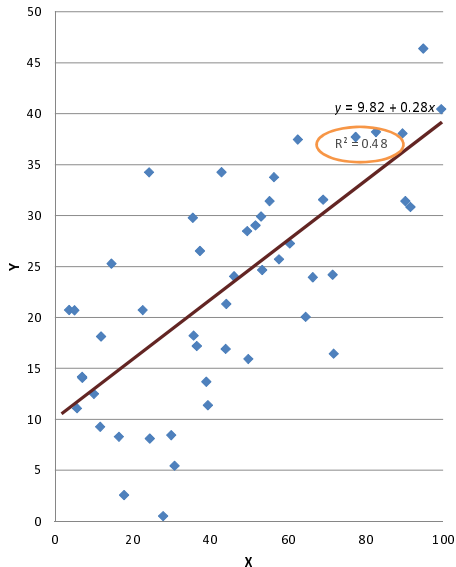
Noteu que aquesta mesura estarà sempre **entre 0 i 1**. Quan més proper a 1, millor serà l'ajust.

# El coeficient de determinació gràficament

"Bon" ajust



"Mal" ajust



# *Continguts*

## **TEMA 2. EL MODEL DE REGRESSIÓ SIMPLE**

- 1 El model.
- 2 L'estimador mínim quadrat ordinari (MQO).
- 3 Bondat de l'ajust.
- 4** Distribució de l'estimador MQO.
- 5 Experiments de Monte Carlo.
- 6 Aplicacions.



## *L'estimador MQO com a variable aleatòria*

Fins i tot amb  $x$  fixes, l'estimador és una **variable aleatòria**:  $Y$  és una **variable aleatòria** (perquè  $u$  és una v.a.).

Obtindrem un **estimador diferent** per cada **mostra diferent**.

**Funció de densitat mostral**: distribució de l'estimador en mostres repetides de la mateixa mida i amb les mateixes  $x$  ( $x$  fixes).

## *L'esperança i la variança de l'estimador*

Partirem de la següent **transformació** de l'estimador:

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'y = \beta + (X'X)^{-1}X'u.$$

(demostració pissarra)

A partir d'aquí és fàcil demostrar que: (pissarra)

- $\mathbb{E}[\hat{\beta}] = \mathbb{E} \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix} = \beta.$
- $\text{Var}(\hat{\beta}) = \begin{bmatrix} \text{Var}(\hat{\beta}_0) & \text{Cov}(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) \\ \text{Cov}(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1) & \text{Var}(\hat{\beta}_1) \end{bmatrix} = \sigma^2(X'X)^{-1}.$

**Exercici:** trobar les expressions per  $\text{Var}(\hat{\beta}_0)$ ,  $\text{Var}(\hat{\beta}_1)$  i  $\text{Cov}(\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1)$ .

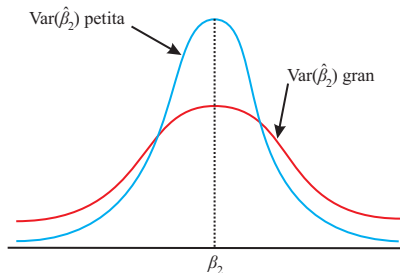
## *Distribució de l'estimador*

Recordeu la **propietat** de la distribució **normal** que diu que si  $Z \sim \mathcal{N}(\mu, \Sigma)$ , aleshores  $W = AZ + b \sim \mathcal{N}(A\mu + b, A\Sigma A')$ .

Per tant, ja sabem quina serà la **distribució de  $\hat{\beta}$** :

$$\hat{\beta} \sim \mathcal{N}(\beta, \sigma^2(X'X)^{-1}).$$

**Gràficament**, per cada paràmetre (p.ex.  $\hat{\beta}_1$ ):



## *Estimador no esbiaixat i eficient*

Com hem demostrat, l'estimador MQO sempre satisfà  $\mathbb{E}[\hat{\beta}] = \beta$ . Quan un estimador compleix aquesta propietat es diu que és un estimador **no esbiaixat**.

Es pot demostrar també que l'estimador MQO és el que té menys variança d'entre tots aquells estimadors lineals<sup>1</sup> no esbiaixats (Teorema Gauss-Markov).

Quan un estimador compleix aquesta propietat es diu que és un estimador **eficient**.

---

<sup>1</sup> Es diu que un estimador és un estimador lineal quan es pot escriure com una combinació lineal de les pertorbacions, és a dir, que té aquesta forma:  $Au + b$

## *Estimació de la variança de l'estimador*

La variança de l'estimador  $\hat{\beta}$  **no és coneguda**. Per estimar-la necessitarem un **estimador de  $\sigma^2$** .

Recordem que, per a tot  $i$ :

$$\text{Var}(u_i) = \sigma^2 = \mathbb{E}[(u_i - \mathbb{E}[u_i])^2] = \mathbb{E}[u_i^2].$$

Per tant, un **estimador ideal** seria  $\bar{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N u_i^2}{N}$ .

**No coneixem**  $u$ , però podríem utilitzar  $\hat{u}$ . No obstant això,  $\tilde{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N \hat{u}_i^2}{N}$  és un estimador **esbiaixat** de  $\sigma^2$ :  $\mathbb{E}[\tilde{\sigma}^2] \neq \sigma^2$ .

L'estimador alternatiu **no esbiaixat** és:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\sum_{i=1}^N \hat{u}_i^2}{N-2} = \frac{\hat{u}'\hat{u}}{N-2} = \frac{SQR}{N-2}.$$

# *Continguts*

## **TEMA 2. EL MODEL DE REGRESSIÓ SIMPLE**

- 1 El model.
- 2 L'estimador mínim quadrat ordinari (MQO).
- 3 Bondat de l'ajust.
- 4 Distribució de l'estimador MQO.
- 5 Experiments de Monte Carlo.**
- 6 Aplicacions.

## *Motivació*

En l'apartat anterior hem vist que  $\hat{\beta} \sim \mathcal{N}(\beta, \sigma^2(X'X)^{-1})$ .

Aquest resultat es basa en una **derivació “teòrica”**, a partir de certes propietats estadístiques i matemàtiques.

Com a alternativa, **aproximarem** la distribució de l'estimador a partir de la **simulació** (experiments de Monte Carlo).

## *Objectiu*

La simulació serveix per entendre **quin paper** juga cada element del model (Tema 1).

En l'econometria, els experiments de Monte Carlo són una eina útil perquè **a vegades no podem derivar la distribució d'un estimador** de forma “teòrica”.

**Idea bàsica:** si els vertaders paràmetres són  $\beta = b$  i  $\sigma^2 = s$ , i tenim mostres de  $N = n$  observacions, quina seria la distribució de probabilitat del nostre estimador MQO.



## *Experiments de Monte Carlo amb $x$ fixes*

1. Triar els paràmetres del model:

- Escollir els valors de tots els **paràmetres** del model:  $\beta$  i  $\sigma^2$ .
- Triar la **mida mostral**  $N$ .
- Generar una **mostra de  $x$**  de mida  $N$  ( $x$  fixes!).

2. Obtenir  $M$  estimadors  $\hat{\beta}$  i  $\hat{\sigma}^2$ :

- Generar una **mostra de  $y$**  de mida  $N$  (utilitzant  $\beta$  i  $\sigma^2$ ).
- **Estimar**  $\hat{\beta}$  i  $\hat{\sigma}^2$  per MQO amb la mostra generada.
- **Guardar** els resultats.
- Repetir el procés  $M$  **vegades** (bucle).

3. Presentar els resultats (histograma).

# Experiments de Monte Carlo amb Gretl (I)

```
gretl: MonteCarlo_Tema2.inp

# Triem el nombre de mostres que volem generar (M):
nulldata 100

# Indiquem que es creï una variable, b2, per guardar posteriorment els resultats, i que,
# de moment, l'ompli de zeros
series b2=0

# Indiquem quina serà la mida mostral (N)
smpl 1 30

# Generem una mostra de x de mida N (que utilitzarem en totes les repeticions ja que hem
# assumit que les x són fixes!). En aquest cas les treurem d'una distribució uniforme
genr x=uniform(0,20)

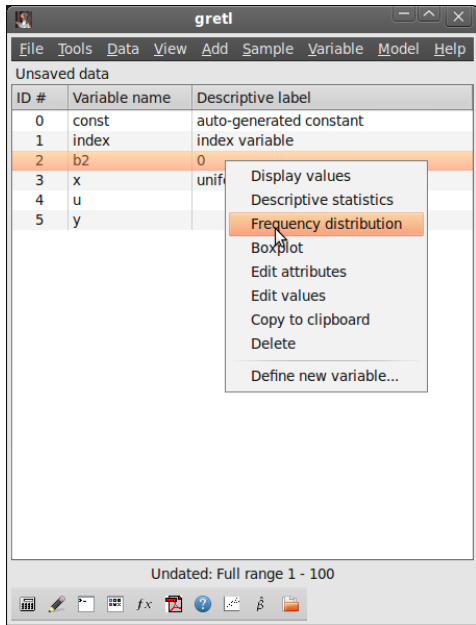
# Aquesta línia indica que tot el que hi ha comprés entre aquest punt i l'ordre
# "endloop" es repetirà M=100 vegades (quiet indica que no mostri output)
loop j=1..100 --quiet

    # Generem les pertorbacions de la nostra mostra (assumim  $\sigma^2=36$ )
    genr u=normal(0,6)
    # Generem la mostra de y (hem assumit  $\beta_1=5$  i  $\beta_2=2$ )
    genr y=5+2*x+u
    # Indiquem que estimi el model per MQO (i que no mostri output)
    ols y const x --quiet
    # Guardem l'estimació del paràmetre associat a x en el lloc corresponent de b2
    genr b2[j]=$coeff(x)

endloop

# Indiquem que ens deixi generar totes les observacions generades
smpl 1 100
```

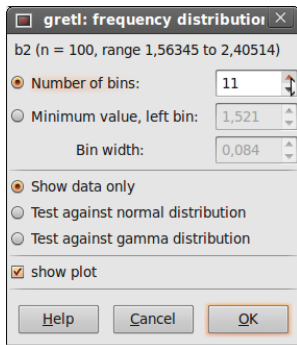
# Experiments de Monte Carlo amb Gretl (II)



The screenshot shows the main window of the Gretl software. At the top, there is a menu bar with options: File, Tools, Data, View, Add, Sample, Variable, Model, and Help. Below the menu bar, a table titled "Unsaved data" is displayed. The table has three columns: "ID #", "Variable name", and "Descriptive label". The data rows are as follows:

ID #	Variable name	Descriptive label
0	const	auto-generated constant
1	index	index variable
2	b2	0
3	x	unif
4	u	
5	y	

A context menu is open over the row for variable "b2". The menu items are: Display values, Descriptive statistics, Frequency distribution (highlighted), Boxplot, Edit attributes, Edit values, Copy to clipboard, Delete, and Define new variable... At the bottom of the window, it says "Undated: Full range 1 - 100".



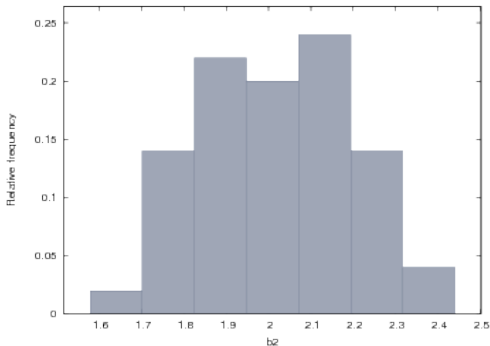
The screenshot shows the "gretl: frequency distribution" dialog box. It displays the following information and settings:

- Variable: b2 (n = 100, range 1,56345 to 2,40514)
- Number of bins: 11
- Minimum value, left bin: 1,521
- Bin width: 0,084
- Options:
  - Show data only (selected)
  - Test against normal distribution
  - Test against gamma distribution
  - show plot (checked)

Buttons at the bottom: Help, Cancel, and OK.

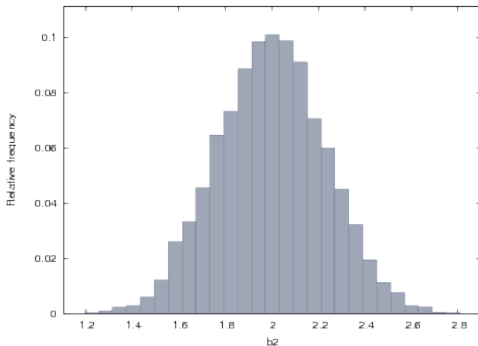
# Experiments de Monte Carlo amb Gretl (III)

```
gretl: MonteCarlo_Tema2.inp
nulldata 50
series b2=0
sml 1 30
genr x=uniform(0,20)
loop j=1..50 --quiet
  genr u=normal(0,6)
  genr y=5+2*x+u
  ols y const x --quiet
  genr b2[j]=$coeff(x)
endloop
sml 1 50
```



# Experiments de Monte Carlo amb Gretl (III)

```
gretl: MonteCarlo_Tema2.inp
nulldata 100
series b2=0
smpl 1 30
genr x=uniform(0,20)
loop j=1..100 --quiet
  genr u=normal(0,6)
  genr y=5+2*x+u
  ols y const x --quiet
  genr b2[j]=$coeff(x)
endloop
smpl 1 100
```



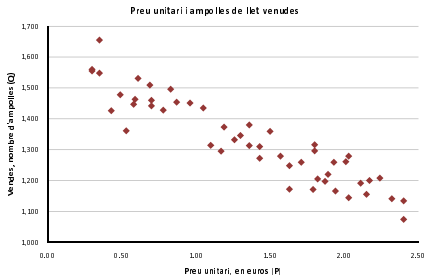
# *Continguts*

## **TEMA 2. EL MODEL DE REGRESSIÓ SIMPLE**

- 1 El model.
- 2 L'estimador mínim quadrat ordinari (MQO).
- 3 Bondat de l'ajust.
- 4 Distribució de l'estimador MQO.
- 5 Experiments de Monte Carlo.
- 6** Aplicacions.

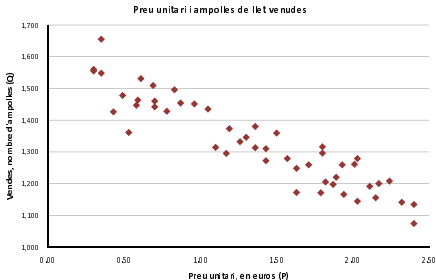
# *Els nostres tres exemples (del Tema 1)*

Demanda de llet:  $Q_i = \beta_0 + \beta_1 P_i + u_i$

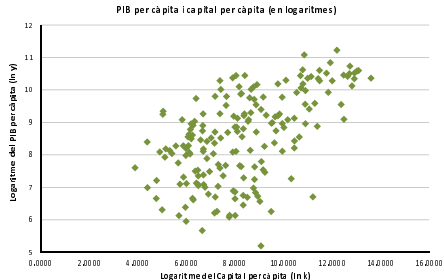


# *Els nostres tres exemples (del Tema 1)*

Demanda de llet:  $Q_i = \beta_0 + \beta_1 P_i + u_i$



Cobb-Douglas:  $\ln Y_i = \beta_0 + \beta_1 \ln K_i + u_i$

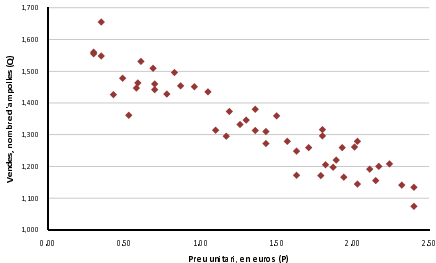




# Els nostres tres exemples (del Tema 1)

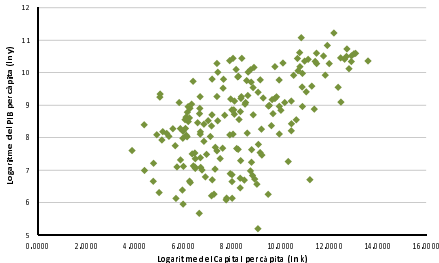
Demanda de llet:  $Q_i = \beta_0 + \beta_1 P_i + u_i$

Preu unitari i ampolles de llet venudes



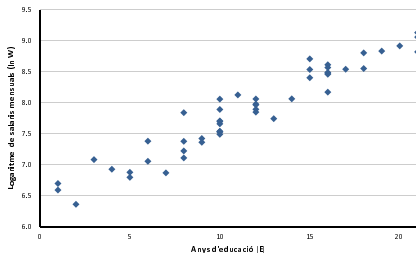
Cobb-Douglas:  $\ln Y_i = \beta_0 + \beta_1 \ln K_i + u_i$

PIB per càpita i capital per càpita (en logarítmes)



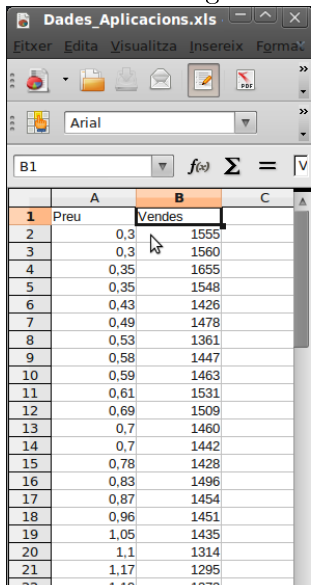
Salariis i educació:  $\ln W_i = \beta_0 + \beta_1 E_i + u_i$

Salariis bruts mensuals (en logarítmes) per anys d'educació



# Exemple I: Demanda de llet $Q_i = \beta_0 + \beta_1 P_i + u_i$

La nostra base de dades és la següent:



The screenshot shows a spreadsheet window titled "Dades\_Aplicacions.xls". The spreadsheet has three columns: A, B, and C. Column A is labeled "Preu" and column B is labeled "Vendes". The data is as follows:

	A	B	C
1	Preu	Vendes	
2	0,3	1555	
3	0,3	1560	
4	0,35	1655	
5	0,35	1548	
6	0,43	1426	
7	0,49	1478	
8	0,53	1361	
9	0,58	1447	
10	0,59	1463	
11	0,61	1531	
12	0,69	1509	
13	0,7	1460	
14	0,7	1442	
15	0,78	1428	
16	0,83	1496	
17	0,87	1454	
18	0,96	1451	
19	1,05	1435	
20	1,1	1314	
21	1,17	1295	
22	1,16	1272	

## *Regressió (manualment)—coeficients*

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 \\ 1 & 0.3 \\ 1 & 0.35 \\ 1 & 0.35 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} 1555 \\ 1560 \\ 1655 \\ 1548 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

## *Regressió (manualment)—coeficients*

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 \\ 1 & 0.3 \\ 1 & 0.35 \\ 1 & 0.35 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} 1555 \\ 1560 \\ 1655 \\ 1548 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$X'X = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + \dots & 1 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.35 + \dots \\ 0.3 \cdot 1 + 0.3 \cdot 1 + 0.35 \cdot 1 + \dots & 0.3 \cdot 0.3 + 0.3 \cdot 0.3 + 0.35 \cdot 0.35 + \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & 67.45 \\ 67.45 & 111.28 \end{bmatrix}$$

## *Regressió (manualment)—coeficients*

$$X'X = \begin{bmatrix} 50 & 67.45 \\ 67.45 & 111.28 \end{bmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{50 \cdot 111.28 - 67.45^2} \begin{bmatrix} 111.28 & -67.45 \\ -67.45 & 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1097 & -0.0665 \\ -0.0665 & 0.0493 \end{bmatrix}$$

## *Regressió (manualment)—coeficients*

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 \\ 1 & 0.3 \\ 1 & 0.35 \\ 1 & 0.35 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} 1555 \\ 1560 \\ 1655 \\ 1548 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$X'y = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1555 + 1 \cdot 1560 + 1 \cdot 1655 + \dots \\ 0.3 \cdot 1555 + 0.3 \cdot 1560 + 0.35 \cdot 1655 + \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 66568 \\ 85797.43 \end{bmatrix}$$

## Regressió (manualment)—coeficients

$$(X'X)^{-1} = \begin{bmatrix} 0.1097 & -0.0665 \\ -0.0665 & 0.0493 \end{bmatrix}$$

$$X'y = \begin{bmatrix} 66568 \\ 85797.43 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1097 \cdot 66568 - 0.0665 \cdot 85797.43 \\ -0.0665 \cdot 66568 + 0.0493 \cdot 85797.43 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1597.55 \\ -197.32 \end{bmatrix}$$

## Regressió (manualment)—coeficients

$$X = \begin{bmatrix} 1 & 0.3 \\ 1 & 0.3 \\ 1 & 0.35 \\ 1 & 0.35 \\ \vdots & \vdots \end{bmatrix} \quad y = \begin{bmatrix} 1555 \\ 1560 \\ 1655 \\ 1548 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$X'X = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + \dots & 1 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.3 + 1 \cdot 0.35 + \dots \\ 0.3 \cdot 1 + 0.3 \cdot 1 + 0.35 \cdot 1 + \dots & 0.3 \cdot 0.3 + 0.3 \cdot 0.3 + 0.35 \cdot 0.35 + \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 50 & 67.45 \\ 67.45 & 111.28 \end{bmatrix}$$

$$(X'X)^{-1} = \frac{1}{50 \cdot 111.28 - 67.45^2} \begin{bmatrix} 111.28 & -67.45 \\ -67.45 & 50 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1097 & -0.0665 \\ -0.0665 & 0.0493 \end{bmatrix}$$

$$X'y = \begin{bmatrix} 1 \cdot 1555 + 1 \cdot 1560 + 1 \cdot 1655 + \dots \\ 0.3 \cdot 1555 + 0.3 \cdot 1560 + 0.35 \cdot 1655 + \dots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 66568 \\ 85797.43 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\beta} = \begin{bmatrix} \hat{\beta}_0 \\ \hat{\beta}_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.1097 \cdot 66568 - 0.0665 \cdot 85797.43 \\ -0.0665 \cdot 66568 + 0.0493 \cdot 85797.43 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1597.55 \\ -197.32 \end{bmatrix}$$



## *Regressió (manualment)—s.e.'s i $R^2$*

$$\hat{u} = y - X\hat{\beta} = \begin{bmatrix} 1555 \\ 1560 \\ 1655 \\ \vdots \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1597.55 + (-197.32) \cdot 0.3 \\ 1597.55 + (-197.32) \cdot 0.3 \\ 1597.55 + (-197.32) \cdot 0.35 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16.65 \\ 21.65 \\ 126.52 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

## Regressió (manualment)—s.e.'s i $R^2$

$$\hat{u} = y - X\hat{\beta} = \begin{bmatrix} 16.65 \\ 21.65 \\ 126.52 \\ \vdots \end{bmatrix}$$
$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{u}'\hat{u}}{50-2} = \frac{16.65^2+21.65^2+126.52^2+\dots}{48} = 2665.57$$

## *Regressió (manualment)—s.e.'s i $R^2$*

$$\hat{\sigma}^2 = \quad \quad \quad = 2665.57$$

$$\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}) = \hat{\sigma}^2(X'X)^{-1} = 2665.57 \cdot \begin{bmatrix} 0.1097 & -0.0665 \\ -0.0665 & 0.0493 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 292.44 & -177.26 \\ -177.26 & 131.40 \end{bmatrix}$$



## *Regressió (manualment)—s.e.'s i $R^2$*

$$\bar{y} = \frac{1555+1560+1655+\dots}{50} = 1331.36$$

## Regressió (manualment)—s.e.'s i $R^2$

$$y - \bar{y}\iota = \begin{bmatrix} 1555 \\ 1560 \\ 1655 \\ \vdots \end{bmatrix} - 1331.36 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1555 - 1331.36 \cdot 1 \\ 1560 - 1331.36 \cdot 1 \\ 1655 - 1331.36 \cdot 1 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 223.64 \\ 228.64 \\ 323.64 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

## Regressió (manualment)—s.e.'s i $R^2$

$$\hat{u} = y - X\hat{\beta} = \begin{bmatrix} 16.65 \\ 21.65 \\ 126.52 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$y - \bar{y}\iota = \begin{bmatrix} 223.64 \\ 228.64 \\ 323.64 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$R^2 = 1 - \frac{\hat{u}'\hat{u}}{(y-\bar{y}\iota)'(y-\bar{y}\iota)} = \frac{16.65^2+21.65^2+126.52^2+\dots}{223.64^2+228.64^2+323.64^2+\dots} = 0.8606$$

## Regressió (manualment) — s.e.'s i $R^2$

$$\hat{u} = y - X\hat{\beta} = \begin{bmatrix} 1555 \\ 1560 \\ 1655 \\ \vdots \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1597.55 + (-197.32) \cdot 0.3 \\ 1597.55 + (-197.32) \cdot 0.3 \\ 1597.55 + (-197.32) \cdot 0.35 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16.65 \\ 21.65 \\ 126.52 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{\hat{u}'\hat{u}}{50-2} = \frac{16.65^2 + 21.65^2 + 126.52^2 + \dots}{48} = 2665.57$$

$$\widehat{\text{Var}}(\hat{\beta}) = \hat{\sigma}^2(X'X)^{-1} = 2665.57 \cdot \begin{bmatrix} 0.1097 & -0.0665 \\ -0.0665 & 0.0493 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 292.44 & -177.26 \\ -177.26 & 131.40 \end{bmatrix}$$

$$s.e.(\hat{\beta}_0) = \sqrt{292.44} = 17.10 \quad s.e.(\hat{\beta}_1) = \sqrt{131.4} = 11.46$$

$$\bar{y} = \frac{1555 + 1560 + 1655 + \dots}{50} = 1331.36$$

$$y - \bar{y}\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1555 \\ 1560 \\ 1655 \\ \vdots \end{bmatrix} - 1331.36 \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1555 - 1331.36 \cdot 1 \\ 1560 - 1331.36 \cdot 1 \\ 1655 - 1331.36 \cdot 1 \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 223.64 \\ 228.64 \\ 323.64 \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$R^2 = 1 - \frac{\hat{u}'\hat{u}}{(y - \bar{y}\mathbf{1})'(y - \bar{y}\mathbf{1})} = \frac{16.65^2 + 21.65^2 + 126.52^2 + \dots}{223.64^2 + 228.64^2 + 323.64^2 + \dots} = 0.8606$$



## *Presentació dels resultats*

La forma estàndard de presentar els resultats d'una regressió és la següent:

$$\hat{Q}_i = 1597.55 - 197.32P_i \quad R^2 = 0.8606$$

(17.10)                  (11.46)

$$SQR = 127,947.22 \text{ (Opcional)}$$

Interpretació?

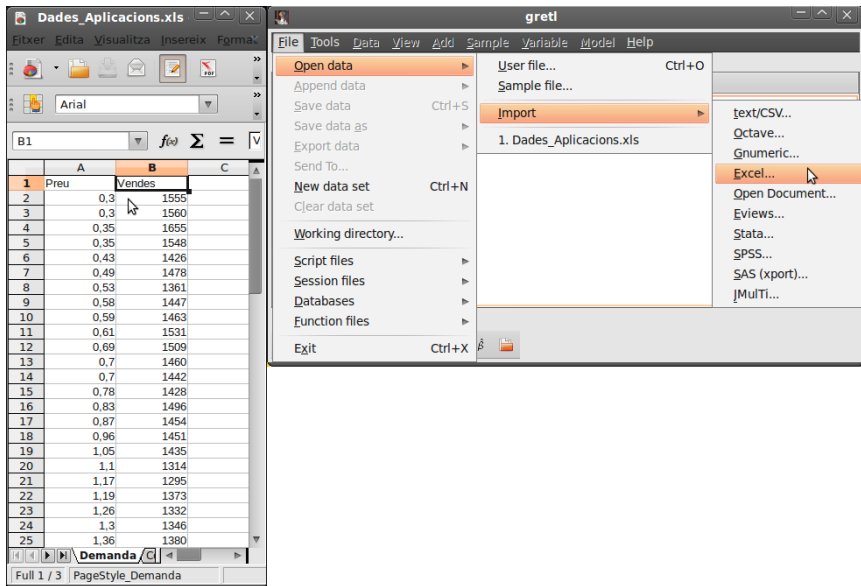
# Importar dades

The screenshot shows an Excel spreadsheet titled "Dades\_Aplicacions.xls". The spreadsheet has two columns: "Preu" (Price) in column A and "Vendes" (Sales) in column B. The data is as follows:

	A	B	C
1	Preu	Vendes	
2	0,3	1555	
3	0,3	1560	
4	0,35	1655	
5	0,35	1548	
6	0,43	1426	
7	0,49	1478	
8	0,53	1361	
9	0,58	1447	
10	0,59	1463	
11	0,61	1531	
12	0,69	1509	
13	0,7	1460	
14	0,7	1442	
15	0,78	1428	
16	0,83	1496	
17	0,87	1454	
18	0,96	1451	
19	1,05	1435	
20	1,1	1314	
21	1,17	1295	
22	1,19	1373	
23	1,26	1332	
24	1,3	1346	
25	1,36	1380	

The status bar at the bottom indicates "Full 1 / 3" and "PageStyle\_Demanda".

# Importar dades



The image shows two windows side-by-side. The left window is a spreadsheet titled 'Dades\_Aplicacions.xls' with columns 'A' and 'B'. The right window is the 'gretl' application with the 'File' menu open, showing the 'Import' option selected.

	A	B	C
1	Preu	Vendes	
2		0,3	1555
3		0,3	1560
4		0,35	1655
5		0,35	1548
6		0,43	1426
7		0,49	1478
8		0,53	1361
9		0,58	1447
10		0,59	1463
11		0,61	1531
12		0,69	1509
13		0,7	1460
14		0,7	1442
15		0,78	1428
16		0,83	1496
17		0,87	1454
18		0,96	1451
19		1,05	1435
20		1,1	1314
21		1,17	1295
22		1,19	1373
23		1,26	1332
24		1,3	1346
25		1,36	1380

The 'gretl' window shows the 'File' menu with the following options: Open data, Append data, Save data (Ctrl+S), Save data as, Export data, Send To..., New data set (Ctrl+N), Clear data set, Working directory..., Script files, Session files, Databases, Function files, and Exit (Ctrl+X). The 'Import' option is highlighted, and its submenu is open, showing: User file... (Ctrl+O), Sample file..., 1. Dades\_Aplicacions.xls, text/CSV..., Octave..., Gnumeric..., Excel... (highlighted), Open Document..., Eviews..., Stata..., SPSS..., SAS (xport)..., and JMulTi...

# Importar dades

The screenshot shows the gretl software interface. On the left is a spreadsheet window titled 'Dades\_Aplicacions.xls' with columns A, B, and C. Column A is labeled 'Preu' and column B is labeled 'Vendes'. The data in column B ranges from 1555 to 1380. The spreadsheet is currently displaying 'Full 1 / 3' and 'PageStyle\_Demanda'.

The gretl main window has the 'File' menu open, with 'Import' selected. The 'Import' submenu is also open, showing a list of file formats: 'Text/CSV...', 'Octave...', 'Numeric...', 'Excel...' (highlighted), 'Open Document...', 'Eviews...', 'Stata...', 'SPSS...', 'SAS (xport)...', and 'Multi...'. The file '1. Dades\_Aplicacions.xls' is listed in the main menu.

The 'gretl: spreadsheet impo' dialog box is open, showing 'Start import at:' with 'column: 1' and 'row: 1'. Under 'Sheet to import:', the 'Demanda' sheet is selected. There is a checkbox for 'Produce debugging output' which is currently unchecked. The 'OK' button is highlighted.

	A	B	C
1	Preu	Vendes	
2		0,3	1555
3		0,3	1560
4		0,35	1655
5		0,35	1548
6		0,43	1426
7		0,49	1478
8		0,53	1361
9		0,58	1447
10		0,59	1463
11		0,61	1531
12		0,69	1509
13		0,7	1460
14		0,7	1442
15		0,78	1428
16		0,83	1496
17		0,87	1454
18		0,96	1451
19		1,05	1435
20		1,1	1314
21		1,17	1295
22		1,19	1373
23		1,26	1332
24		1,3	1346
25		1,36	1380

# Importar dades

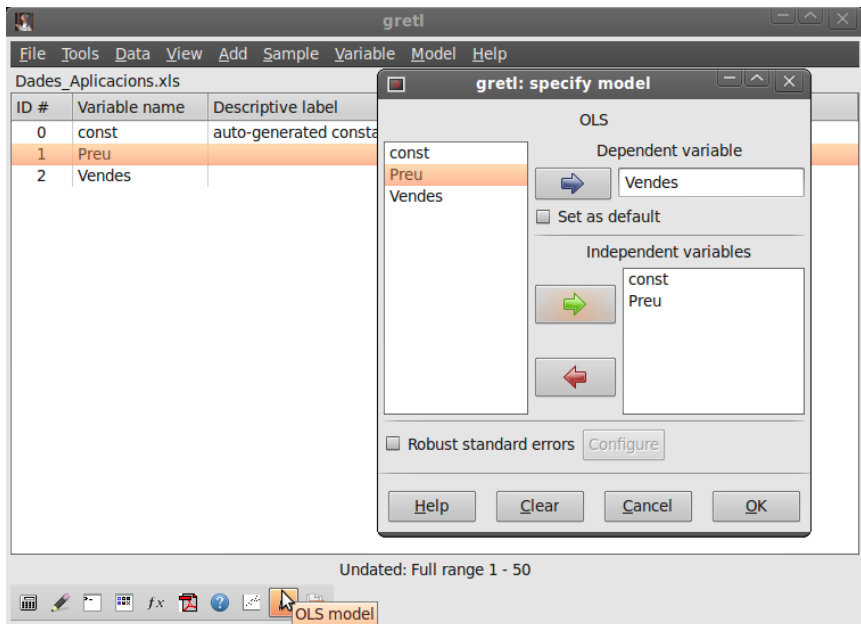
The screenshot shows the gretl software interface with three overlapping windows:

- gretl File Menu:** The 'Import' option is selected, showing a list of files including '1. Dades\_Aplicacions.xls'. The 'Excel...' option is highlighted.
- gretl: spreadsheet impo:** A dialog box where 'column:' is set to 1 and 'row:' is set to 1. The 'Sheet to import:' list includes 'Demanda', 'Cobb-Douglas', and 'Salaris-Educacio'. The 'OK' button is highlighted.
- gretl: open data:** A dialog box asking: 'The imported data have been interpreted as undated (cross-sectional). Do you want to give the data a time-series or panel interpretation?'. The 'No' button is highlighted.

The background shows a spreadsheet with the following data:

	A	B	C
1	Preu	Vendes	
2	0,3	1555	
3	0,3	1560	
4	0,35	1655	
5	0,35	1548	
6	0,43	1426	
7	0,49	1478	
8	0,53	1361	
9	0,58	1447	
10	0,59	1463	
11	0,61	1531	
12	0,69	1509	
13	0,7	1460	
14	0,7	1442	
15	0,78	1428	
16	0,83	1496	
17	0,87	1454	
18	0,96	1451	
19	1,05	1435	
20	1,1	1314	
21	1,17	1295	
22	1,19	1373	
23	1,26	1332	
24	1,3	1346	
25	1,36	1380	

# Regressió (Gretl, via menús)



The screenshot displays the Gretl software interface. The main window shows a data table with the following content:

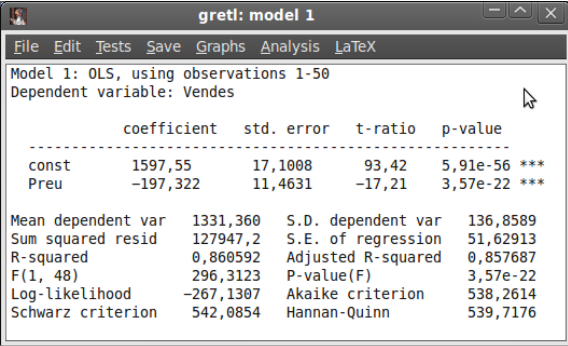
ID #	Variable name	Descriptive label
0	const	auto-generated constant
1	Preu	
2	Vendes	

The 'gretl: specify model' dialog box is open, showing the following configuration:

- Model: OLS
- Dependent variable: Vendes
- Independent variables: const, Preu
- Robust standard errors:  (Configure button available)
- Buttons: Help, Clear, Cancel, OK

The taskbar at the bottom shows the 'OLS model' icon highlighted.

## Regressió (Gretl): Demanda de llet



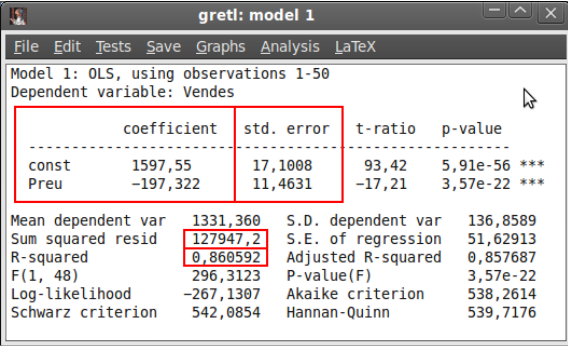
Model 1: OLS, using observations 1-50  
Dependent variable: Vendes

	coefficient	std. error	t-ratio	p-value
const	1597,55	17,1008	93,42	5,91e-56 ***
Preu	-197,322	11,4631	-17,21	3,57e-22 ***

Mean dependent var	1331,360	S.D. dependent var	136,8589
Sum squared resid	127947,2	S.E. of regression	51,62913
R-squared	0,860592	Adjusted R-squared	0,857687
F(1, 48)	296,3123	P-value(F)	3,57e-22
Log-likelihood	-267,1307	Akaike criterion	538,2614
Schwarz criterion	542,0854	Hannan-Quinn	539,7176

# Regressió (Gretl): Demanda de llet



The screenshot shows the Gretl software window titled 'gretl: model 1'. The menu bar includes File, Edit, Tests, Save, Graphs, Analysis, and LaTeX. The main text indicates 'Model 1: OLS, using observations 1-50' and 'Dependent variable: Vendes'. A table of coefficients is displayed, with a red box highlighting the 'coefficient' and 'std. error' columns. Below this, a summary of model statistics is shown, with a red box highlighting the 'R-squared' value.

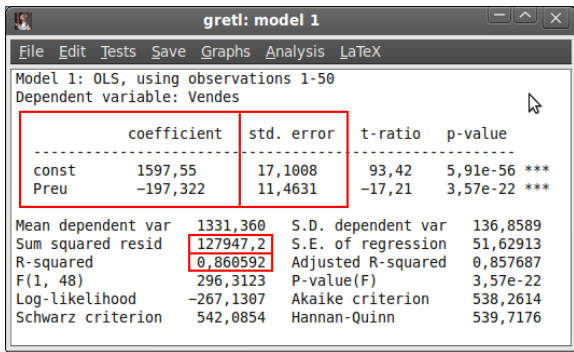
	coefficient	std. error	t-ratio	p-value
const	1597,55	17,1008	93,42	5,91e-56 ***
Preu	-197,322	11,4631	-17,21	3,57e-22 ***

Mean dependent var	1331,360	S.D. dependent var	136,8589
Sum squared resid	127947,2	S.E. of regression	51,62913
R-squared	0,860592	Adjusted R-squared	0,857687
F(1, 48)	296,3123	P-value(F)	3,57e-22
Log-likelihood	-267,1307	Akaike criterion	538,2614
Schwarz criterion	542,0854	Hannan-Quinn	539,7176



# Regressió (Gretl): Demanda de llet



The screenshot shows the Gretl software window titled 'gretl: model 1'. The menu bar includes File, Edit, Tests, Save, Graphs, Analysis, and LaTeX. The main text indicates 'Model 1: OLS, using observations 1-50' and 'Dependent variable: Vendes'. A table of coefficients is displayed, with a red box highlighting the 'coefficient' and 'std. error' columns. Below this, a summary table shows various statistics, with the 'Adjusted R-squared' value of 0,860592 highlighted in red.

	coefficient	std. error	t-ratio	p-value
const	1597,55	17,1008	93,42	5,91e-56 ***
Preu	-197,322	11,4631	-17,21	3,57e-22 ***

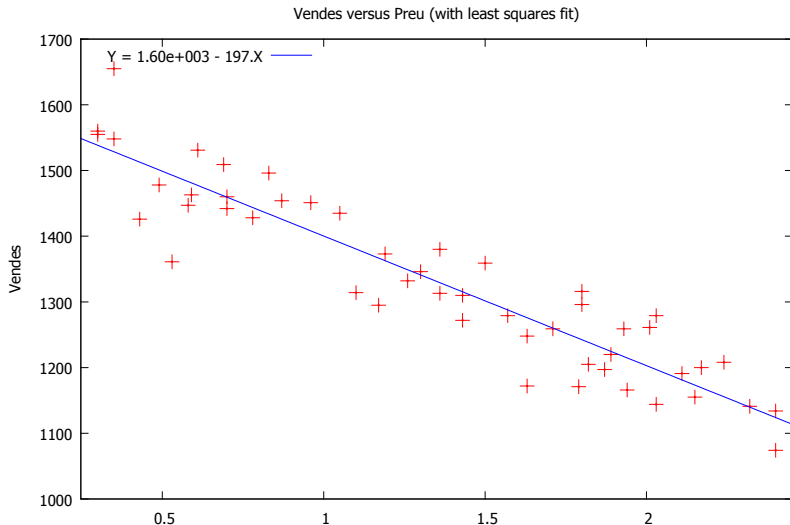
Mean dependent var	1331,360	S.D. dependent var	136,8589
Sum squared resid	127947,2	S.E. of regression	51,62913
R-squared	0,860592	Adjusted R-squared	0,857687
F(1, 48)	296,3123	P-value(F)	3,57e-22
Log-likelihood	-267,1307	Akaike criterion	538,2614
Schwarz criterion	542,0854	Hannan-Quinn	539,7176

$$\hat{Q}_i = 1,597.55 - 197.32P_i \quad R^2 = 0.8606$$

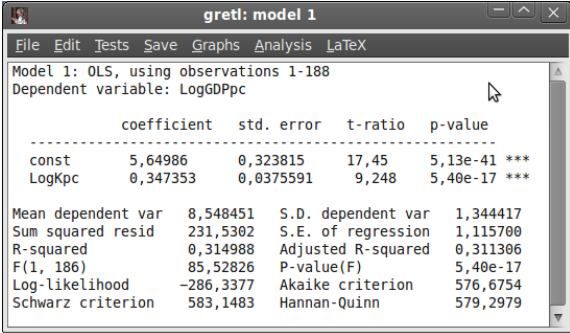
(17.10)                      (11.46)

$$SQR = 127,947.22 \text{ (Opcional)}$$

# Regressió (Gretl): Demanda de llet—Presentació gràfica



*Funció de producció Cobb-Douglas:*  $\ln y_i = \beta_0 + \beta_1 \ln k_i + u_i$



The screenshot shows the 'gretl: model 1' window. The title bar includes 'gretl: model 1' and standard window controls. The menu bar contains 'File', 'Edit', 'Tests', 'Save', 'Graphs', 'Analysis', and 'LaTeX'. The main text area displays the following information:

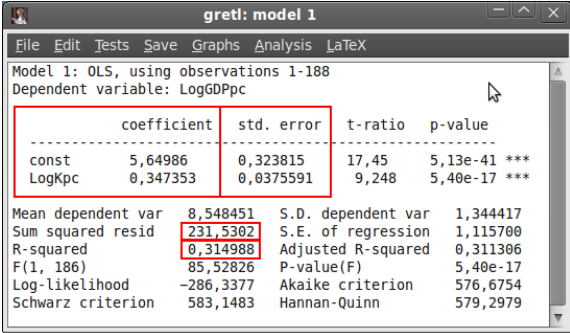
Model 1: OLS, using observations 1-188  
Dependent variable: LogGDPpc

	coefficient	std. error	t-ratio	p-value
const	5,64986	0,323815	17,45	5,13e-41 ***
LogKpc	0,347353	0,0375591	9,248	5,40e-17 ***

Mean dependent var	8,548451	S.D. dependent var	1,344417
Sum squared resid	231,5302	S.E. of regression	1,115700
R-squared	0,314988	Adjusted R-squared	0,311306
F(1, 186)	85,52826	P-value(F)	5,40e-17
Log-likelihood	-286,3377	Akaike criterion	576,6754
Schwarz criterion	583,1483	Hannan-Quinn	579,2979

*Funció de producció Cobb-Douglas:  $\ln y_i = \beta_0 + \beta_1 \ln k_i + u_i$*



gretl: model 1

File Edit Tests Save Graphs Analysis LaTeX

Model 1: OLS, using observations 1-188  
Dependent variable: LogGDPpc

	coefficient	std. error	t-ratio	p-value
const	5,64986	0,323815	17,45	5,13e-41 ***
LogKpc	0,347353	0,0375591	9,248	5,40e-17 ***

Mean dependent var	8,548451	S.D. dependent var	1,344417
Sum squared resid	231,5302	S.E. of regression	1,115700
R-squared	0,314988	Adjusted R-squared	0,311306
F(1, 186)	85,52826	P-value(F)	5,40e-17
Log-likelihood	-286,3377	Akaike criterion	576,6754
Schwarz criterion	583,1483	Hannan-Quinn	579,2979

# Funció de producció Cobb-Douglas: $\ln y_i = \beta_0 + \beta_1 \ln k_i + u_i$

gretl: model 1

File Edit Tests Save Graphs Analysis LaTeX

Model 1: OLS, using observations 1-188  
Dependent variable: LogGDPpc

	coefficient	std. error	t-ratio	p-value
const	5,64986	0,323815	17,45	5,13e-41 ***
LogKpc	0,347353	0,0375591	9,248	5,40e-17 ***

Mean dependent var	8,548451	S.D. dependent var	1,344417
Sum squared resid	231,5302	S.E. of regression	1,115700
R-squared	0,314988	Adjusted R-squared	0,311306
F(1, 186)	85,52826	P-value(F)	5,40e-17
Log-likelihood	-286,3377	Akaike criterion	576,6754
Schwarz criterion	583,1483	Hannan-Quinn	579,2979

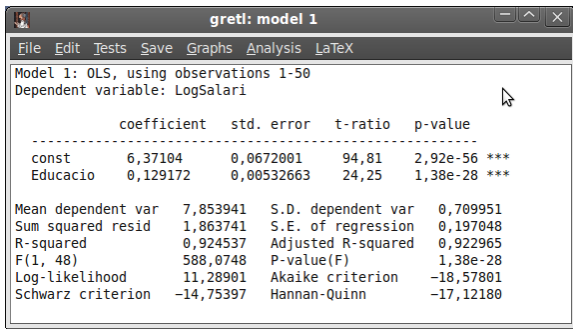
$$\ln \hat{y}_i = 5.65 + 0.35 \ln k_i \quad R^2 = 0.3150$$

(0.32)      (0.04)

$$SQR = 231.53 \text{ (Opcional)}$$

Interpretació?

# Rendiments de l'educació: $\ln W_i = \beta_0 + \beta_1 E_i + u_i$



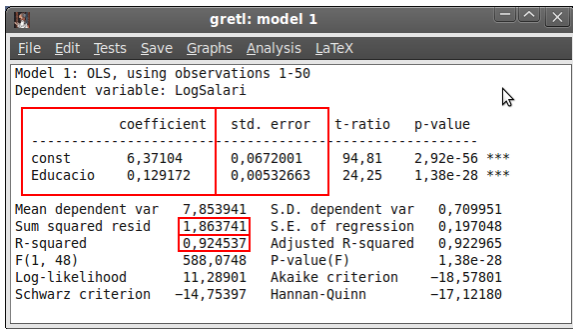
Model 1: OLS, using observations 1-50  
Dependent variable: LogSalari

	coefficient	std. error	t-ratio	p-value
const	6,37104	0,0672001	94,81	2,92e-56 ***
Educacio	0,129172	0,00532663	24,25	1,38e-28 ***

Mean dependent var	7,853941	S.D. dependent var	0,709951
Sum squared resid	1,863741	S.E. of regression	0,197048
R-squared	0,924537	Adjusted R-squared	0,922965
F(1, 48)	588,0748	P-value(F)	1,38e-28
Log-likelihood	11,28901	Akaike criterion	-18,57801
Schwarz criterion	-14,75397	Hannan-Quinn	-17,12180

# Rendiments de l'educació: $\ln W_i = \beta_0 + \beta_1 E_i + u_i$



The screenshot shows the 'gretl: model 1' window. The title bar includes standard window controls. The menu bar contains 'File', 'Edit', 'Tests', 'Save', 'Graphs', 'Analysis', and 'LaTeX'. The main text area displays the following information:

Model 1: OLS, using observations 1-50  
Dependent variable: LogSalari

	coefficient	std. error	t-ratio	p-value
const	6,37104	0,0672001	94,81	2,92e-56 ***
Educacio	0,129172	0,00532663	24,25	1,38e-28 ***

Below the coefficient table, several summary statistics are listed:

Mean dependent var	7,853941	S.D. dependent var	0,709951
Sum squared resid	1,863741	S.E. of regression	0,197048
R-squared	0,924537	Adjusted R-squared	0,922965
F(1, 48)	588,0748	P-value(F)	1,38e-28
Log-likelihood	11,28901	Akaike criterion	-18,57801
Schwarz criterion	-14,75397	Hannan-Quinn	-17,12180

# Rendiments de l'educació: $\ln W_i = \beta_0 + \beta_1 E_i + u_i$

gretl: model 1

File Edit Tests Save Graphs Analysis LaTeX

Model 1: OLS, using observations 1-50  
Dependent variable: LogSalari

	coefficient	std. error	t-ratio	p-value
const	6,37104	0,0672001	94,81	2,92e-56 ***
Educacio	0,129172	0,00532663	24,25	1,38e-28 ***

Mean dependent var 7,853941 S.D. dependent var 0,709951  
Sum squared resid 1,863741 S.E. of regression 0,197048  
R-squared 0,924537 Adjusted R-squared 0,922965  
F(1, 48) 588,0748 P-value(F) 1,38e-28  
Log-likelihood 11,28901 Akaike criterion -18,57801  
Schwarz criterion -14,75397 Hannan-Quinn -17,12180

$$\ln \widehat{W}_i = 6.37 + 0.13 E_i \quad R^2 = 0.9245$$

(0.07)      (0.01)

$$SQR = 1.86 \text{ (Opcional)}$$

Interpretació?